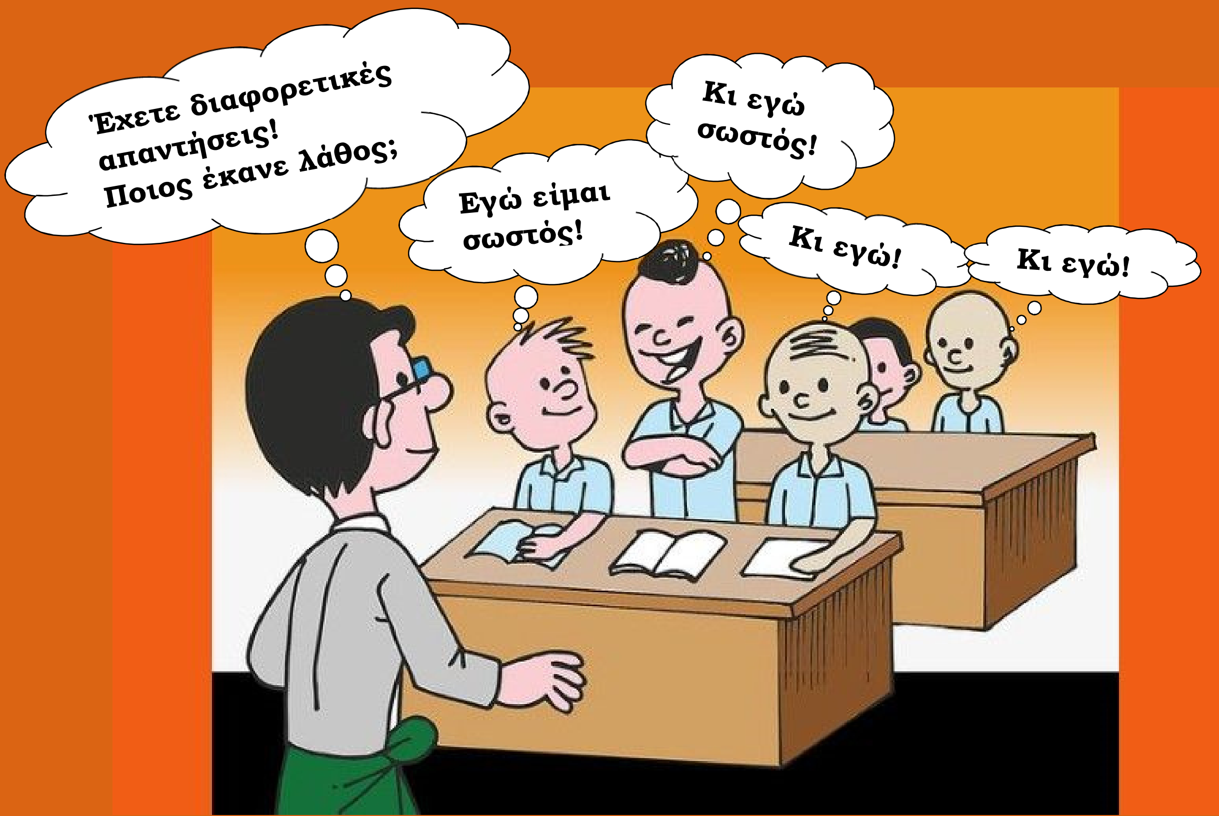
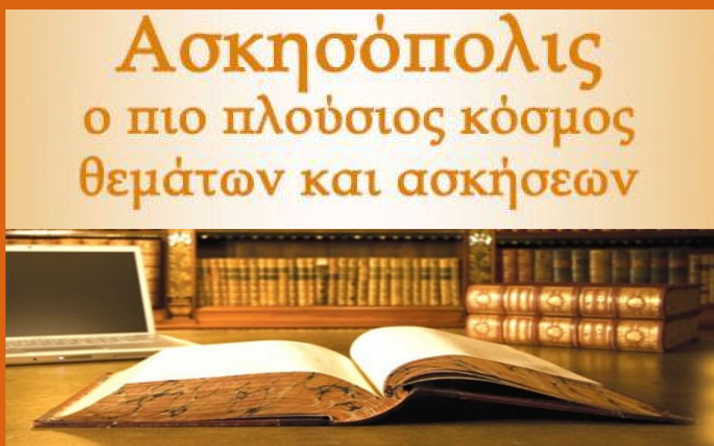
Askisopolis.gr

Πρόσεχε μην κάνεις λάθος!





Νίκος Τούντας

Σκάναρε με!

www.askisopolis.gr

Πρόσεχε μην κάνεις λάθος!

Λίγα λόγια

Εγκαινιάζουμε μία νέα ανάρτηση για τα Μαθηματικά Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου στο Ασκησόπολις, με αποδέκτες τους μαθητές, καθώς και τους δασκάλους τους. Σκοπός είναι να προσπαθήσουμε να τονίσουμε λεπτά σημεία της ύλης στα οποία μπορούν να γίνουν συχνά λάθη. Λάθη που γίνονται καθημερινά μέσα στις τάξεις.

Δίνεται λοιπόν μία εφαρμογή στην οποία πρέπει να επιλέξουμε την σωστή απάντηση. Δεν είναι ερώτηση θεωρίας, αλλά κανονική άσκηση η οποία χρειάζεται χαρτί και μολύβι. Υπάρχει μία σωστή απάντηση και κάνοντας κάποιο λάθος κατά την επίλυση της άσκησης καταλήγουμε στις άλλες λανθασμένες. Δηλαδή, το λάθος υπάρχει κίνδυνος να νομίζουμε ότι είναι σωστό. Για αυτό και ο τίτλος «Πρόσεχε μην κάνεις λάθος!».

Στο τέλος υπάρχουν αναλυτικές λύσεις, καθώς και τα πιθανά λάθη που μπορεί να γίνουν και να μας οδηγήσουν σε κάποια από τις υπόλοιπες απαντήσεις.

Καλή διασκέδαση!

Νίκος Τούντας

Επικοινωνία:
Τηλέφωνο: 6980001913
Email: ntountas.maths@yahoo.com
Facebook: Νίκος Τούντας
www.askisopolis.gr / Χρήστης: Νίκος Τούντας

Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Προσανατολισμού

Πρόσεχε μην κάνεις λάθος!

1η Άσκηση

2023 – 2024

Έως ισότητα συναρτήσεων

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\frac{1-x}{1-2x}$ και $g(x)=\begin{cases}\ln(1-x)-\ln(1-2x)\,, & x<\frac{1}{2}\\ \ln(x-1)-\ln(2x-1)\,, & x>1\end{cases}$.

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση σε καθένα από τα παρακάτω.

1) Για τις συναρτήσεις f,g ισχύει ότι:

Α. Είναι ίσες μόνον στο διάστημα $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$. **Β.** Είναι ίσες συναρτήσεις.

2) Για την ανίσωση $f(x)<\ln x$ ισχύει ότι:

Α. $x>1$ **Β.** $x>\frac{1}{2}$ **Γ.** Είναι αδύνατη

3) Για την εξίσωση $\sqrt{f(x)}=\ln x$ ισχύει ότι:

Α. Είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x)=\ln^2 x$. **Β.** Είναι αδύνατη.

Νίκος Τούντας

ΛΥΣΗ

1) Η f ορίζεται όταν $\begin{cases} \dfrac{1-x}{1-2x} > 0 \\ 1-2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x)(1-2x) > 0 \\ x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1 $+\infty$
$1-x$	+	+	–
$1-2x$	+	–	–
Γινόμενο	+	–	+

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{1}{2} \text{ ή } x > 1 \\ x \neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$ άρα $D_f = \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$

Για κάθε $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ είναι $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1-2x} = \ln(1-x) - \ln(1-2x) = g(x)$

Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ είναι $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1-2x} = \ln\dfrac{-(x-1)}{-(2x-1)} = \ln\dfrac{x-1}{2x-1} = \ln(x-1) - \ln(2x-1) = g(x)$

Άρα οι f,g είναι ίσες συναρτήσεις και σωστή είναι η Β απάντηση.

ΕΚΑΝΑ ΛΑΘΟΣ! Αν λέγαμε ότι για κάθε $x \in D_f$ είναι $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1-2x} = \ln(1-x) - \ln(1-2x)$ τότε θα ήταν σωστή η Α. Όμως το λάθος που θα κάναμε είναι ότι δεν έχουμε εξετάσει το πρόσημο των $1-x$ και $1-2x$ ώστε να είναι θετικά όταν θα εκτελέσουμε την ιδιότητα των λογαρίθμων με την οποία σπάμε τον λογάριθμο.

2) Η ανίσωση ορίζεται όταν: $\begin{cases} x \in D_f \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty) \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$

Είναι $f(x) < \ln x \Leftrightarrow \ln\dfrac{1-x}{1-2x} < \ln x \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{1-2x} < x \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{1-2x} - x < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-x-x+2x^2}{1-2x} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-2x+1}{1-2x} < 0 \Leftrightarrow (1-2x)(2x^2-2x+1) < 0 \Leftrightarrow$

$\underset{\Delta<0}{\overset{2x^2-2x+1>0}{\Leftrightarrow}} 1-2x < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$ όμως $x \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$ άρα τελικά είναι $f(x) < \ln x \Leftrightarrow x > 1$.

Άρα σωστή απάντηση είναι η Α.

ΕΚΑΝΑ ΛΑΘΟΣ! 1. Αν δουλεύαμε όπως παραπάνω αλλά δεν ελέγχαμε τους περιορισμούς τότε θα βγάζαμε $x > \dfrac{1}{2}$ και θα ήταν σωστή απάντηση η Β. **2.** Αν πολλαπλασιάζαμε την $\dfrac{1-x}{1-2x} < x$ με $1-2x$ τότε θα έβγαινε $1-x < x-2x^2 \Leftrightarrow 2x^2-2x+1 < 0$ τότε θα ήταν αδύνατη και σωστή η απάντηση Γ αφού $\Delta < 0$, όμως θα είχαμε κάνει λάθος καθώς πολλαπλασιάζουμε μία ανίσωση με κάτι που δεν γνωρίζουμε αν είναι θετικό ή αρνητικό. Αντιμετωπίσαμε την ανίσωση σαν εξίσωση.

3) Για να ορίζεται η εξίσωση πρέπει:

α) $x \in D_f = \left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$

β) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln\dfrac{1-x}{1-2x} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{1-2x} \geq 1 \Leftrightarrow \dfrac{1-x}{1-2x} - 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{1}-x-\cancel{1}+2x}{1-2x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{1-2x} \geq 0 \overset{x\neq\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} x(1-2x) \geq 0 \overset{x\neq\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} x \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$$

γ) $x>0$

Άρα η εξίσωση ορίζεται όταν $x \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$

Για κάθε $x \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ είναι $f(x)>0$ άρα $\sqrt{f(x)}>0$ και $\ln x<0$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη και σωστή είναι η απάντηση Β.

ΕΚΑΝΑ ΛΑΘΟΣ! Αν λέγαμε ότι $\sqrt{f(x)}=\ln x \Leftrightarrow \sqrt{f(x)}^2=(\ln x)^2 \Leftrightarrow f(x)=\ln^2 x$ τότε θα ήταν σωστή η απάντηση Α όμως θα είχαμε κάνει δύο σοβαρά λάθη. Πρώτον δεν έχουμε εξετάσει τους περιορισμούς (οι οποίοι δεν είναι ίδιοι για τις δύο εξισώσεις) και δεύτερον υψώνουμε στο τετράγωνο χωρίς να ξέρουμε αν διατηρείται η ισοδυναμία (συμβαίνει όταν είναι ομόσημα τα δύο μέλη).